ЛА - лекция 6 30.10.12

$A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, $\Rightarrow C = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

$C = AB$; $AB \neq BA$

Свойството е по елементно

$\lambda \in F$, E_n отред n ?!

Св-ва

1) $\lambda(AB) = \lambda AB = A(\lambda B)$
2) $(A+B)C = AC + BC$
3) $(AB)C = ABC = A(BC)$
4) $(AB)^t = B^t A^t$

Примери умножение матрици

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3(-6) & 3 \cdot 7 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{pmatrix} C_{3\times 3}$$

$A_{3\times 3}$ $B_{3\times 1}$

ред по стълб

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + (-4)0 + 6\cdot 0, & 2\cdot 0 + (-4)2 + 6\cdot 0, & 0+0+6(-1) \\ 25 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 25 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Нека $A \in M_{n\times n}$

Ако съществува $A' \in M_{n\times n}$, т.че $A \cdot A' = A' A = E_n$

то A' е обратна матрица на обратимата матрица A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{21} & \cdots & (-1)^{1+n} A_{n1} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$; $X = (x_{ij})_{n \times k}$; $B = (l_{ij})_{n \times k}$

Ако A е обратима матрица и A^{-1} е нейната обратна, то:

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$
$$E_n X = A^{-1} B$$
$$X = A^{-1} B$$

Нека

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & & & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & a_{2n} \\ | & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Задача

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ т.е } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вижда се привежда до Гаус-Жорданов вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & -1 & 4 \end{array}\right)$$ Записваме последния ред и казваме че съответните на Y са равни на 2-та реда т.е.

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$ сме представили от предишната матрица бихме такива чиито (умнож. ред по стълб)

$$\begin{pmatrix} y_{11} - y_{21} + 2y_{31} & y_{12} - y_{22} + 2y_{32} \\ 4y_{21} - 7y_{31} & 4y_{22} - 7y_{32} \end{pmatrix}$$ Създаваме 2 отделни системи съдържащи общи неизвестни

$$\begin{cases} y_{11} - y_{21} + 2y_{31} = 1 \\ 4y_{21} - 7y_{31} = -1 \end{cases}$$ и другата система $\quad \begin{cases} y_{12} - y_{22} + 2y_{32} = -1 \\ 4y_{22} - 7y_{32} = 4 \end{cases}$

отговорите на системите са от матрицата отговор

полагаме $y_{32} = p$ и $y_{31} = q$ $\Rightarrow$

$$4y_{22} - 7p = 4 \Rightarrow y_{22} = \frac{4+7p}{4}; \quad y_{12} - \frac{4+7p}{4} + 2p = 1 \Rightarrow y_{12} = -\frac{p}{4}$$

от $y_{31} = q \Rightarrow y_{21} = \frac{7q-1}{4}$; $y_{11} - \frac{7q}{4} + \frac{1}{4} + 2q = 1 \Rightarrow y_{11} = \frac{3}{4} - \frac{q}{4}$

$$\begin{matrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{q}{4} & -\frac{p}{4} \\ \frac{7q-1}{4} & \frac{4+7p}{4} \\ q & p \end{pmatrix} \begin{matrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{matrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 01 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

от 1-ой ур вадим 2-ю, после от 2-ой ур вадим 3-ю и т.д.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 1 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

т.е. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$